Δέκατο τρίτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = f(x)g(y),\ y(x_0) = 2021$$

όπου $x_0 > 1,\ f : [x_0 - 1, x_0 + 1] \to \mathbb{R}$, συνεχής και $g : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ επίσης συνεχής. Να αποδείξετε ότι το εν λόγω π.α.τ έχει μοναδική λύση στο $[x_0 - 1, x_0 + 1]$. Να δώσετε αναλυτική έκφραση αυτής.

Θέμα 2

Αν y είναι μία λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' + k^2 y = A\cos(kx),\ x \geq 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

όπου k και A θετικές σταθερές, να εξετάσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Θέμα 3

(i) Να επιλύσετε το πρόβλημα ιδιοτιμών $y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0,\ 0 < x < L, y(0) = y(L) = 0$

(ii) Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από το παραπάνω πρόβλημα ιδιοτιμών.

Θέμα 4

Έστω f μια ασυνεχής συνάρτηση στο $t = 1$ με τύπο

$$f(t, y) = H(t)y,$$

όπου H η συνάρτηση Heaviside η οποία ορίζεται ως εξής

$$H(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

(i) Να αποδείξετε ότι το π.α.τ $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = 1,\ t \in \mathbb{R}$ δεν έχει λύση.

(ii) Να ανάγετε το παραπάνω π.α.τ στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(t) = 1 + \int_0^t f(s, y(s))ds$$

και αποδείξετε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση στο ερώτημα (ii) έχει λύση.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ